

Tema 8

Circuitos en régimen permanente sinusoidal (I)

Bibliografía

- A.J. CONEJO, A. CLAMAGIRAND, J.L. POLO, N. ALGUACIL. “CIRCUITOS ELÉCTRICOS PARA LA INGENIERÍA”. MC-GRAW HILL, 2004
- J. W. NILSSON, S.A. RIEDEL. “ELECTRIC CIRCUITS”. SIXTH EDITION. ADDISON-WESLEY READING, 1996

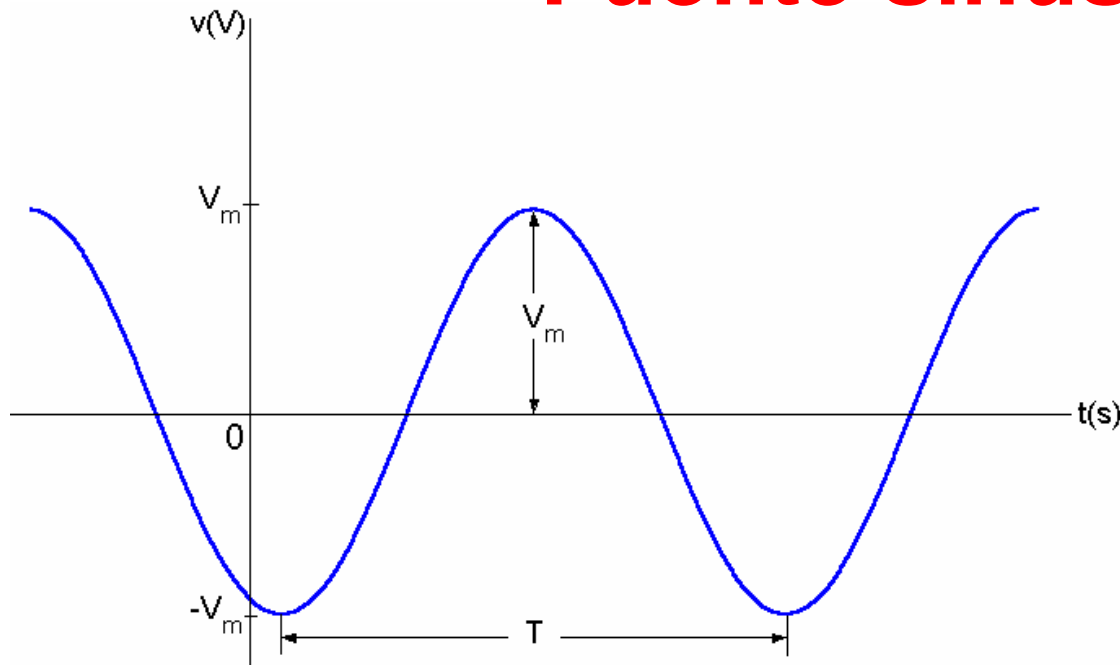
Objetivos (I)

- Representar una forma de onda sinusoidal por medio de un fasor, y operar con fasores
- Familiarizarse con la nueva nomenclatura (impedancia, admitancia, reactancia, susceptancia)
- Enunciar la Ley de Ohm para circuitos en alterna, y determinar la impedancia o admitancia de una resistencia, bobina y condensador
- Construir diagramas fasoriales para representar las tensiones y corrientes de los circuitos en alterna

Contenidos (I)

- **Fuente sinusoidal**
- **Respuesta sinusoidal**
- **Representación de ondas sinusoidales: el fasor**
- **Respuesta de una resistencia**
- **Respuesta de una bobina**
- **Respuesta de un condensador**
- **Impedancia y reactancia**
- **Admitancia, conductancia y susceptancia**
- **Leyes de Kirchhoff**
- **Diagramas fasoriales**

Fuente sinusoidal



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Recordar:

$$\left[\begin{array}{c} \text{angulo} \\ \text{en grados} \end{array} \right] = \frac{180}{\pi} \left[\begin{array}{c} \text{angulo} \\ \text{en radianes} \end{array} \right]$$

V_m	Tensión máxima [V]
T	Periodo (tiempo para un ciclo) [s]
$f = \frac{1}{T}$	Frecuencia [Hz]
$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$	Pulsación [rad/s]
ϕ	Ángulo de fase [grados]

Fuente sinusoidal

Valor eficaz (rms : root mean square):

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

operando

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Aparatos miden valor eficaz:

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi)$$

Respuesta sinusoidal

$$v_s(t) = \sqrt{2}V \cos \omega t$$

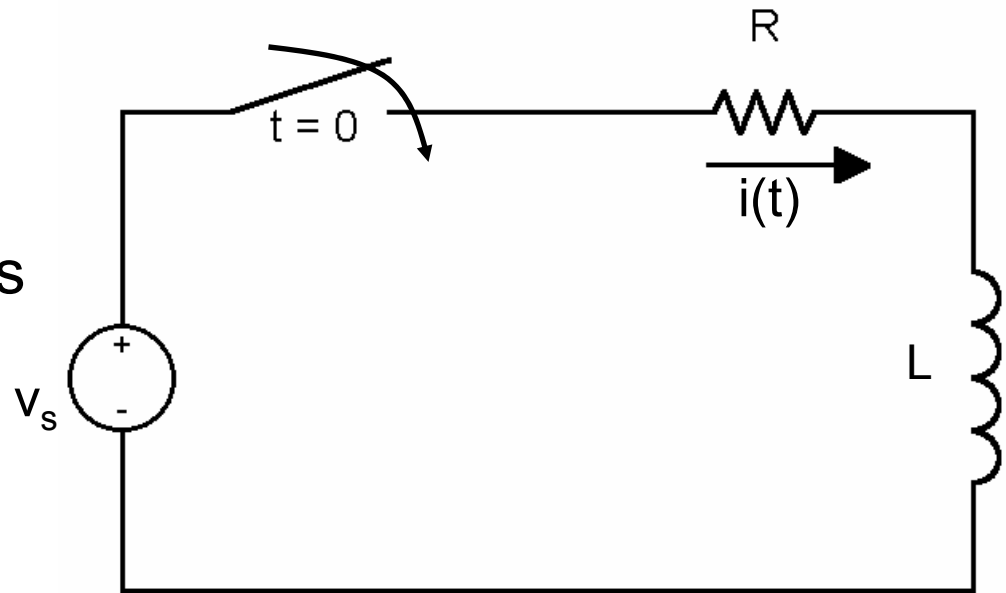
Ley de Kirchhoff de tensiones

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sqrt{2}V \cos \omega t$$

Solución completa : $i(t) = i_p + i_h$

Solución particular : $i_p = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi)$

Solución homogénea : $L \frac{di_h}{dt} + Ri_h = 0$



Respuesta sinusoidal

Solución homogénea : $i_h = K e^{-(R/L)t}$

$$i = i_p + i_h = \sqrt{2I} \cos(\omega t + \phi) + K e^{-(R/L)t}$$

Para $t = 0 \Rightarrow i = 0$:

$$\sqrt{2I} \cos \phi + K = 0; \quad K = -\sqrt{2I} \cos \phi$$

Finalmente :

$$i = \underbrace{\sqrt{2I} \cos(\omega t + \phi)}_{\text{permanente}} - \underbrace{\sqrt{2I} \cos \phi e^{-(R/L)t}}_{\text{transitorio}}$$

Respuesta sinusoidal

- Primer término:
componente transitoria
- Segundo término:
componente de régimen permanente

Respuesta sinusoidal

Observaciones

- La solución en régimen permanente es una función sinusoidal
- La frecuencia de la respuesta es idéntica a la frecuencia de la excitación
- La amplitud de la respuesta es distinta de la amplitud de la excitación
- El ángulo de fase de la respuesta es distinto del ángulo de fase de la excitación

Fasor

El fasor es de utilidad para el análisis en régimen permanente

Identidad de Euler:
$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos \theta + j\sin \theta \\ e^{-j\theta} = \cos \theta - j\sin \theta \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \Re \left\{ e^{j\theta} \right\} \\ \sin \theta &= \Im \left\{ e^{j\theta} \right\} \end{aligned}$$

Fasor

La tensión sinusoidal:

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi)$$

$$= \sqrt{2}V \Re \left\{ e^{j(\omega t + \phi)} \right\}$$

$$= \sqrt{2}V \Re \left\{ e^{j\omega t} e^{j\phi} \right\}$$

$$= \Re \left\{ \sqrt{2} \underbrace{V e^{j\phi}}_{\bar{V}} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \Re \left\{ \bar{V} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Vector unitario giratorio}} \right\}$$

Proyección en
el eje real


Vector unitario
giratorio

¡El giro y la proyección son comunes!

Fasor: la transformación fasorial

$$\bar{V} = Ve^{j\phi} = \tilde{P} \left\{ \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi) \right\}$$

Transformación
fasorial



La transformación fasorial transfiere funciones sinusoidales al plano complejo, también denominado dominio de la frecuencia

$Ve^{j\phi}$ se escribe normalmente como $V \angle \phi$

Fasor: transformada fasorial inversa

$$\mathbf{P}^{-1}\{V\mathbf{e}^{j\phi}\} = \Re\{\sqrt{2}V\mathbf{e}^{j\phi}\mathbf{e}^{j\omega t}\} = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi)$$

La transformada fasorial es útil ya que permite emplear en vez de la **aritmética sinusoidal** la **aritmética compleja**, que es mucho más simple

Ejemplo 8.1

$$y_1(t) = 20 \cos(\omega t - 30^\circ)$$

$$y_2(t) = 40 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)?$$

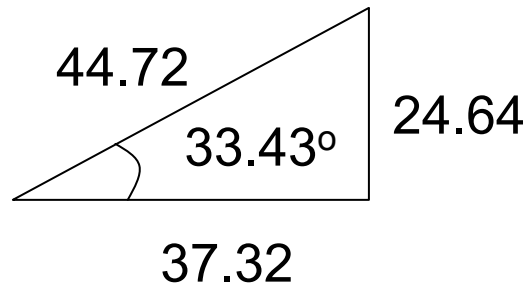
$$\begin{aligned} 1) \quad y(t) &= 20 \cos(\omega t - 30^\circ) + 40 \cos(\omega t + 60^\circ) \\ &= (20 \cos \omega t \cos 30^\circ + 20 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 30^\circ) \\ &\quad + (40 \cos \omega t \cos 60^\circ - 40 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 60^\circ) \\ &= (20 \cos 30^\circ + 40 \cos 60^\circ) \cos \omega t + (20 \operatorname{sen} 30^\circ - 40 \operatorname{sen} 60^\circ) \operatorname{sen} \omega t \\ &= 37.32 \cos \omega t - 24.64 \operatorname{sen} \omega t = 44.72 \left(\frac{37.32}{44.72} \cos \omega t - \frac{24.64}{44.72} \operatorname{sen} \omega t \right) \\ &= 44.72 (\cos 33.43^\circ \cos \omega t - \operatorname{sen} 33.43^\circ \operatorname{sen} \omega t) \\ &= 44.72 \cos(\omega t + 33.43^\circ) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1 (I)

$$2) \quad \bar{Y}_1 = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \quad \bar{Y}_2 = \frac{40}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ$$

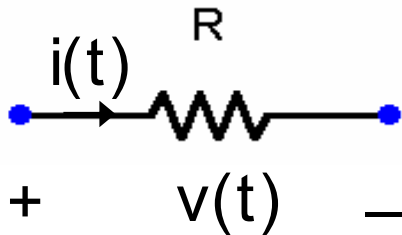
$$\bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ + \frac{40}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = \frac{44.72}{\sqrt{2}} \angle 33.43^\circ$$

$$y(t) = 44.72 \cos(\omega t + 33.43^\circ)$$



Resistencia: Ley de Ohm

sinusoides



$$v(t) = i(t)R$$

Sea

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i)$$

la tensión es:

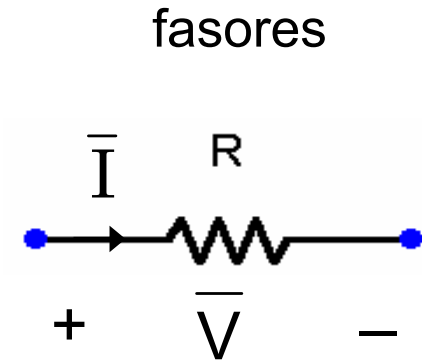
$$v(t) = R[\sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i)] = R\sqrt{2}I[\cos(\omega t + \theta_i)]$$

Resistencia

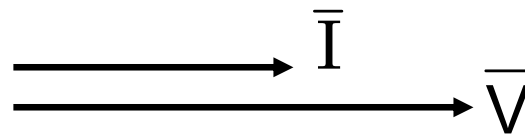
Aplicando la transformada fasorial:

$$P\{\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_i)\} = 1e^{j\theta_i}$$

$$\bar{V} = R I e^{j\theta_i} = R \underbrace{I \angle \theta_i}_{\bar{I}}; \quad \bar{V} = R \bar{I}$$

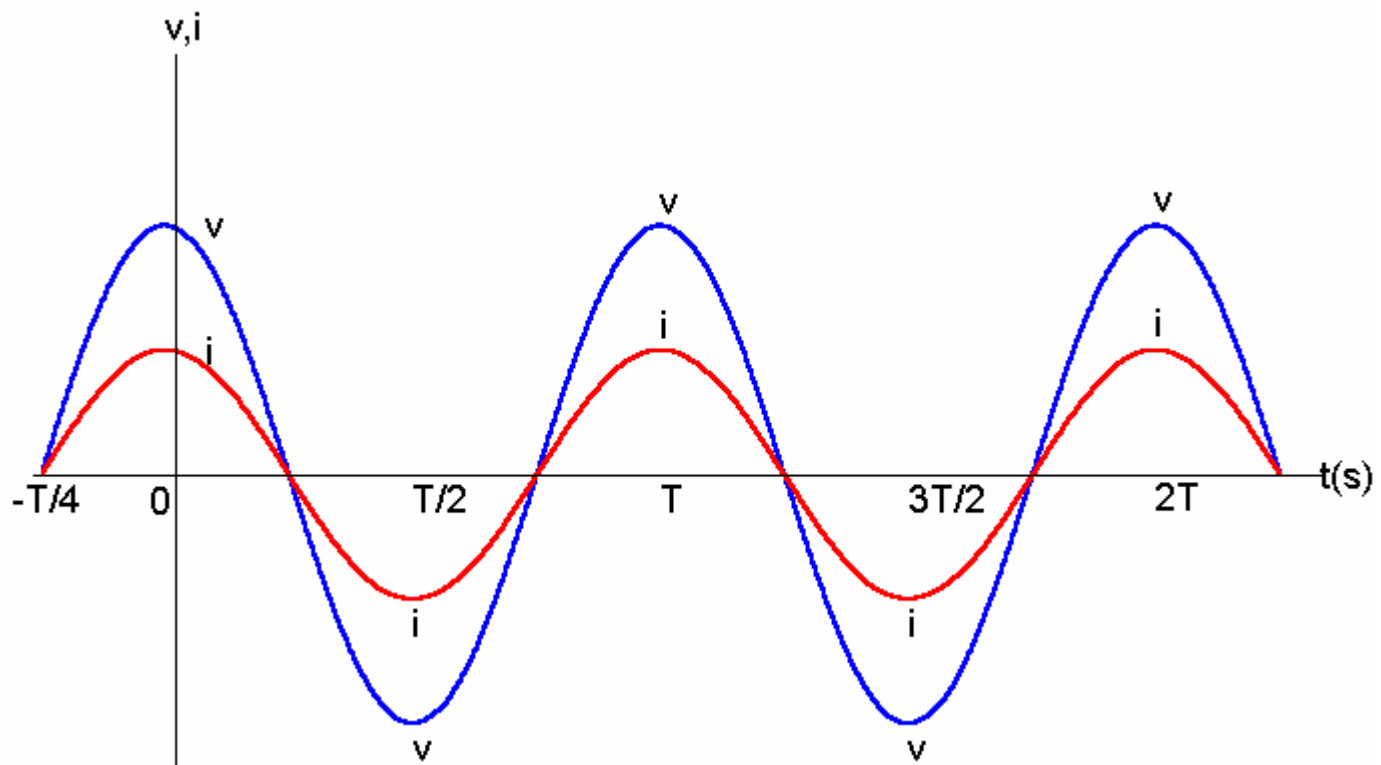


¡la tensión y la corriente están en fase!

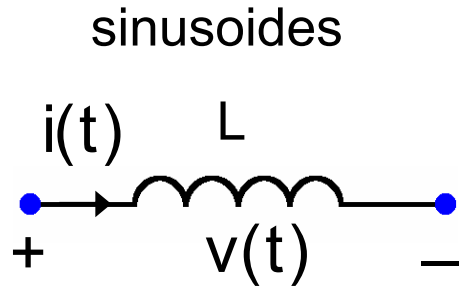


Resistencia

$$\bar{V} = R\bar{I}$$



Bobina



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -\omega L \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i) = -\omega L \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$$

Bobina

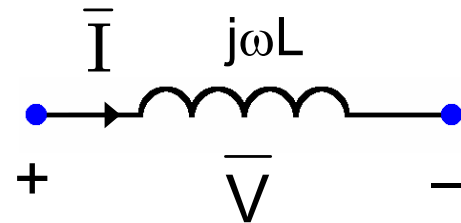
Transformación fasorial

$$\bar{V} = -\omega L I e^{j(\theta_i - 90^\circ)} = -\omega L I e^{j\theta_i} e^{-j90^\circ}$$

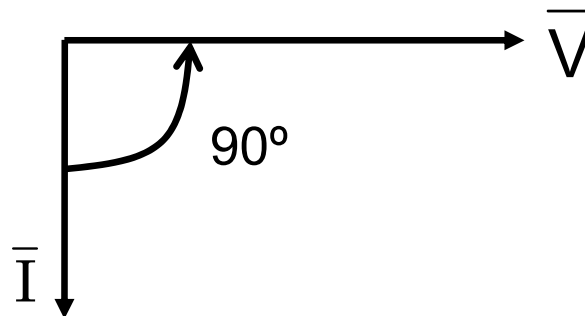
$$\bar{V} = j\omega L I e^{j\theta_i}, \text{ ya que } -j = e^{-j90^\circ}$$

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} = (\omega L \angle 90^\circ)(I \angle \theta_i)$$

$$\bar{V} = \omega L I \angle (\theta_i + 90^\circ)$$

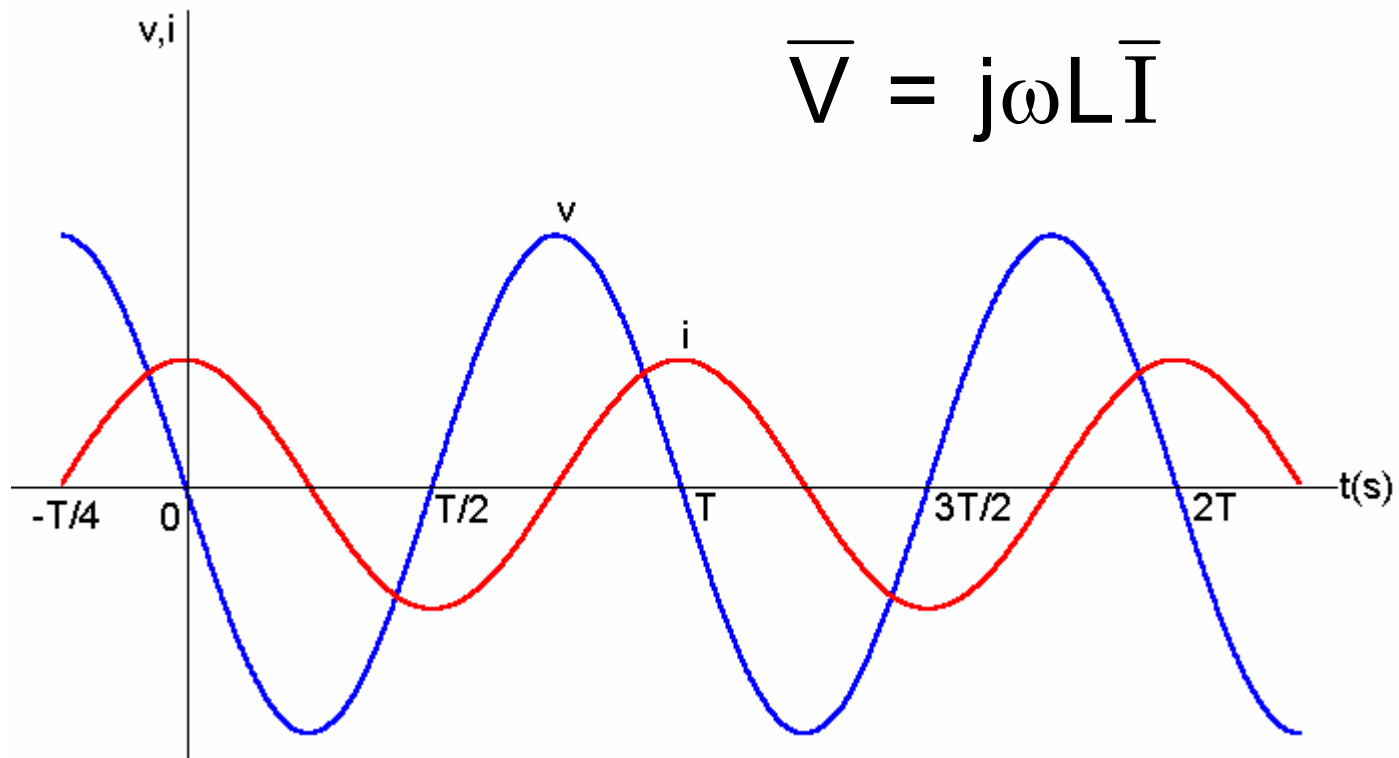


¡corriente retrasada 90° !

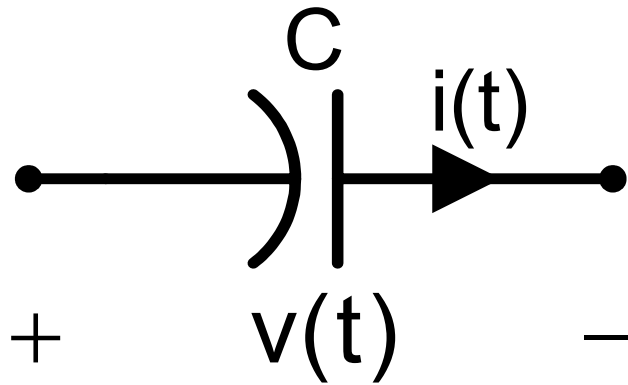


Bobina: observaciones

1. Tensión 90 grados adelantada (pasa antes por 0 al subir)
2. Amplitud de valor $\sqrt{2} \omega L I = \omega L I_m$



Condensador



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Sea: $v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \theta_v)$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = -C\omega\sqrt{2}V \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v)$$

Condensador

Por analogía con la bobina:

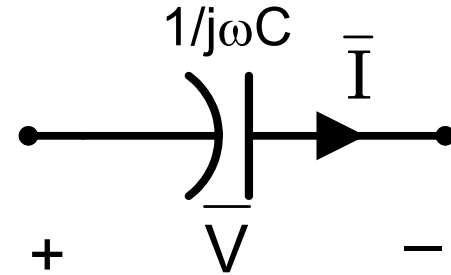
$$\bar{I} = j\omega C \bar{V}$$

o bien,

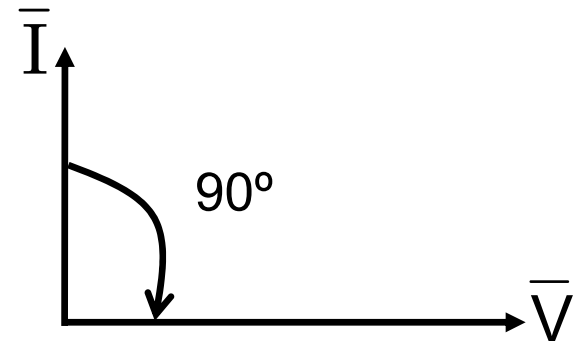
$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}$$

$$\bar{V} = \left(\frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \right) (I \angle \theta_i)$$

$$\bar{V} = \frac{I}{\omega C} \angle (\theta_i - 90^\circ)$$



¡corriente adelantada 90° !



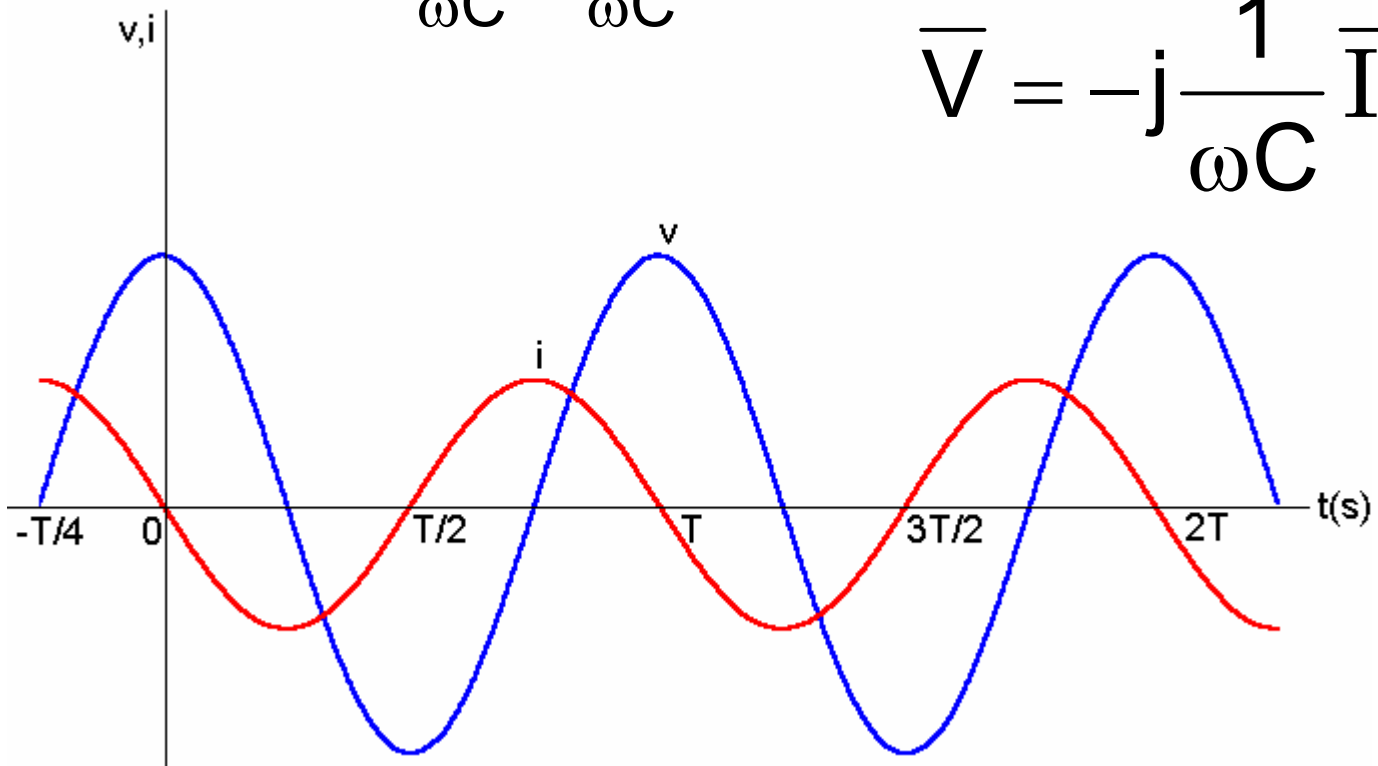
Condensador: observaciones

Observaciones:

1. Tensión retrasada 90° (corriente pasa antes por 0° al subir)

2. Amplitud de valor $\frac{\sqrt{2}I}{\omega C} = \frac{I_m}{\omega C}$

$$\bar{V} = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I}$$



Impedancia

La **impedancia** es el cociente entre los fasores de tensión y corriente

$$\bar{V} = Z \bar{I}$$

Se mide en Ohmios, Ω

¡No es un fador, es un complejo!

Impedancia

Formas de la impedancia:

1) Resistencia: $Z = R$

2) Bobina: $Z = j\omega L$

3) Condensador: $Z = -j\frac{1}{\omega C}$

La parte real de la impedancia se denomina **resistencia**

La parte imaginaria de la impedancia se denomina **reactancia**

Reactancia

Formas de la reactancia:

1) Resistencia: $X = 0$

2) Bobina: $X = \omega L \quad (> 0)$

3) Condensador: $X = -\frac{1}{\omega C} \quad (< 0)$

Admitancia, conductancia y susceptancia

La admitancia se define como la inversa de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

- La admitancia se mide en Siemens [S]
- Las admitancias en paralelo se suman:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

- La parte real de la admitancia es la **conductancia**
- La parte imaginaria de la admitancia es la **susceptancia**

Ley de Kirchhoff de tensiones

La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier camino cerrado en un circuito es igual a 0

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = 0$$

En régimen permanente sinusoidal:

$$\sqrt{2}V_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \sqrt{2}V_2 \cos(\omega t + \theta_2) + \dots + \sqrt{2}V_n \cos(\omega t + \theta_n) = 0$$

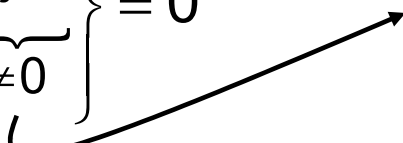
$$\Re\{\sqrt{2}V_1 e^{j\theta_1} e^{j\omega t}\} + \Re\{\sqrt{2}V_2 e^{j\theta_2} e^{j\omega t}\} + \dots + \Re\{\sqrt{2}V_n e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0$$

$$\Re\{\sqrt{2}(V_1 e^{j\theta_1} + V_2 e^{j\theta_2} + \dots + V_n e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\} = 0$$

Ley de Kirchhoff de tensiones

$$\Re \left\{ \underbrace{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n}_{\Rightarrow 0} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\neq 0} \right\} = 0$$

¡Vector unitario giratorio!



por tanto,

$$\text{LKT: } \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n = 0$$

Ley de Kirchhoff de tensiones en el dominio de la frecuencia

Ley de Kirchhoff de corrientes

La suma algebraica de todas la corrientes que inciden en un nudo es igual a 0

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = 0$$

Análogamente a la ley de tensiones:

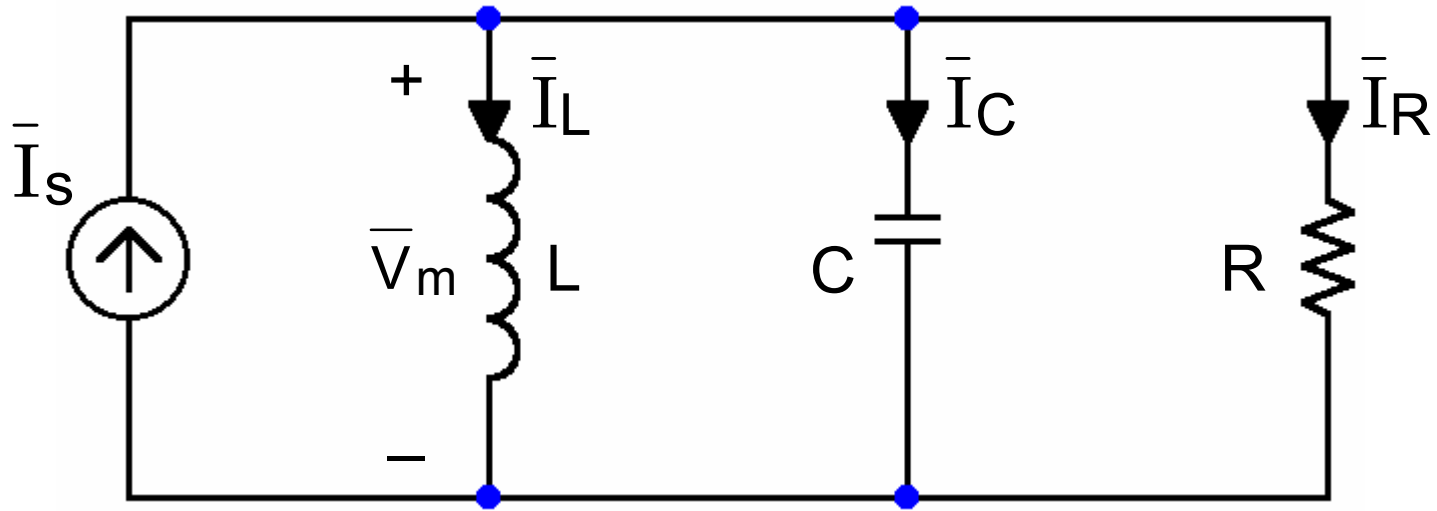
$$\text{LKC: } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n = 0$$

que es la ley de Kirchhoff de corrientes en el dominio de la frecuencia

Diagramas fasoriales

- Los fasores pueden representarse en el plano complejo
- A menudo su representación es útil en la resolución de problemas

Ejemplo 8.2



Utilizar los diagramas fasoriales para encontrar el valor de la resistencia R , de forma que la corriente a través de la resistencia \bar{I}_R esté retrasada 45° respecto a la corriente de la fuente \bar{I}_s

$$L=0.2\text{mH}, C=50\mu\text{F}, \omega=5000 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 8.2 (I)

$$\text{LKC : } \bar{I}_s = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

Suponiendo que $\bar{V}_m = V_m \angle 0^\circ$, se calculan \bar{I}_L , \bar{I}_C e \bar{I}_R como :

$$\bar{I}_L = \frac{V_m \angle 0^\circ}{j(5000)(0.2 \times 10^{-3})} = V_m \angle -90^\circ$$

$$\bar{I}_C = \frac{V_m \angle 0^\circ}{-j \frac{1}{(5000)(50 \times 10^{-6})}} = 4V_m \angle 90^\circ$$

$$\bar{I}_R = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ$$

Ejemplo 8.2 (II)

En el diagrama fasorial se puede ver como la longitud de \bar{I}_R debe ser igual a $3V_m$. Por tanto $R = \frac{1}{3}\Omega$

